WUOLAH



soy_una_tortuga
www.wuolah.com/student/soy_una_tortuga

37981

Midterm-3-Group-45.pdf

Soluciones midterm 3 2018

2° Ampliación de Matemáticas

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Politécnica Superior
UC3M - Universidad Carlos III de Madrid

Como aún estás en la portada, es momento de redes sociales. Cotilléanos y luego a estudiar.

Wuolah Wuolah Wuolah_apuntes WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

ADVANCED MATHEMATICS

Bachelor Degree in Aerospace Engineering, Universidad Carlos III de Madrid

Group 45, course 2018-2019

November 30, 2018

Total duration: 1 hour

PROBLEM 1. (7 points)

Solve the following *anisotropic* Laplace equation over a square, where $a, b > 0$ are constants and $f(x)$ is a given step-wise smooth function:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < L, \\ u(x,0) = u(x,L) = 0, & 0 < x < L, \\ u(0,y) = f(y), & 0 < y < L, \\ u(L,y) = 0, & 0 < y < L. \end{cases}$$

PROBLEM 2. (3 points)

Consider the following boundary-value problem, where $\Lambda \in \mathbb{R}$ is a constant:

$$\begin{cases} x^2\phi'' - x\phi' + \Lambda\phi = 0, \\ \phi(1) = \phi'(1), \\ \phi(2) = 2\phi'(2). \end{cases}$$

2.1 Write it in Sturm-Liouville form, if possible.

2.2 Find the unique solution that exists for $\Lambda = 0$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Scanned by CamScanner

WUOLAH Wuolah Wuolah Wuolah_apuntes

Si esta página te inquieta, te atormenta o te perturba es porque he torcido el marco.
Si llegamos a 14k seguidores en Twitter vuelvo a ponerla bien.

MIDTERM 3 2018 45

①

$$\begin{cases} a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0<x,y<L \\ u(x,0) = u(x,L) = 0, & 0<x<L \\ u(0,y) = f(y), & 0<y<L \\ u(L,y) = 0, & 0<y<L \end{cases} \qquad a,b>0$$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$aX''Y + bXY'' = 0$ I have Dirichlet BC for Y → I want Y alone

$\frac{a}{b}\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$

$\frac{Y''}{Y} = -\frac{a}{b}\frac{X''}{X} = -\lambda$

$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y \\ Y(0) = Y(L) = 0 \end{cases}$ → Dirichlet BC: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$; $Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ $n = 1,2,3,\dots$

$\begin{cases} X'' = X\frac{b}{a}\lambda_n = \frac{b}{a}\frac{n^2\pi^2}{L^2}X \\ X(L) = 0 \end{cases}$ → $k^2 = \frac{b}{a}\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ → $k = \boxed{\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{n\pi}{L} = \pm K_n}$

$X(x) = Ae^{K_n x} + Be^{-K_n x}$

$X(L) = 0 = Ae^{K_n L} + Be^{-K_n L}$ → $B = -A\frac{e^{K_n L}}{e^{-K_n L}} = -Ae^{2K_n L}$

$X(x) = Ae^{K_n x} - Ae^{2K_n L}e^{-K_n x} = Ae^{K_n L}\left(e^{K_n(x-L)} - e^{-K_n(x-L)}\right) = 2Ae^{K_n L}\sinh\left[K_n(x-L)\right]$

Generalized linear superposition principle:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sinh(K_n(x-L))\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}$$

$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(-\sinh(K_n L)\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$

$\| \sum_1^{\infty} (f_n)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$

$$\boxed{u_n = \frac{-f_n}{\sinh(K_n L)} = \frac{-\frac{2}{L}\int_0^L dy\, f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh(K_n L)}}$$

WUOLAH

Scanned by CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

(2)

$$\begin{cases} x^2\phi'' - x\phi' + \Lambda\phi = 0 \\ \phi(1) = \phi'(1) \\ \phi(2) = 2\phi'(2) \end{cases}$$

a) S-L form

$$x^2\phi'' - x\phi' + \Lambda\phi = 0$$

$$\phi'' - \frac{1}{x}\phi' + \frac{\Lambda}{x^2}\phi = 0$$

Multiply by unknown function $\mu(x)$:

$$\mu\phi'' - \frac{\mu}{x}\phi' + \frac{\Lambda}{x^2}\mu\phi = 0$$

$$-\frac{\mu}{x} = \mu' \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{x} \rightsquigarrow \mu = e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\ln(\mu) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{d\phi}{dx}\right) = \mu\phi'' + (\mu')\phi'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\Lambda}{x^3}\phi = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{x}\phi'' - \frac{1}{x^2}\phi' + \frac{\Lambda}{x^3}\phi = 0}$$ is of S-L form $\rightarrow \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d\phi}{dx}) + q(x)\phi(x) + \lambda\sigma(x)\phi(x) = 0$

with $p(x) = \frac{1}{x}$; $q(x) = 0$; $\lambda = \Lambda \rightarrow \sigma(x) = \frac{1}{x^3}$

b) unique solution for $\Lambda = 0$

$$x^2\phi'' - x\phi' = 0 \qquad \varphi = \phi' \rightarrow x^2\varphi' - x\varphi = 0 \rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{x} \rightarrow \ln\varphi = \ln x + \tilde{a}$$

$$e^{\ln\varphi} = e^{\ln x + \tilde{a}} = e^{\ln x}e^{\tilde{a}}$$

$$\varphi = x \qquad a = e^{\tilde{a}}$$

$$\varphi(x) = ax = \phi'$$

$$\phi(x) = \frac{ax^2}{2} + b$$

$$\phi(1) = \phi'(1): \ \frac{a}{2} + b = a \rightarrow b = \frac{a}{2}$$

$$\phi(2) = 2\phi'(2): \ 2a + b = 4a \rightarrow b = 2a$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{a}{2} = 2a \rightarrow a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{\phi(x) = 0 \quad \forall x, \text{ unique solution}}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Scanned by CamScanner

¿Qué estará pasando en Twitter? Síguenos: @Wuolah