MFI-2oConvo-Sol.pdf

Idunn_aero

Mecánica de Fluidos I

2º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Accede al documento original

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS I Segunda Convocatoria	13/07/2026

PROBLEMA

Un depósito cilíndrico de altura H está conectado a tres conductos de longitud L y diámetro a como se muestra en la figura. Los 2 conductos superiores, situados a una distancia R del eje del depósito, conectan el depósito con la atmósfera a presión p_a. El conducto inferior puede tomar agua de la superficie de un embalse. Inicialmente, el sistema depósito-conductos está lleno de agua con las secciones de salida de los conductos superiores y la entrada del conducto inferior tapadas con diafragmas. Si en un cierto instante el sistema se encuentra girando alrededor del eje del depósito y súbitamente se rompen los diafragmas se pide:

1. Valor mínimo de la velocidad angular de giro, Ω_{min}, para que el agua contenida en el sistema depósito-conductos permanezca en equilibrio.

Si partiendo de la situación de equilibrio anterior súbitamente se aumenta la velocidad de giro a un valor dado $\Omega > \Omega_{min}$ el líquido fluye por los conductos en un movimiento turbulento con factor de fricción λ constante. Se pide:

2. Ecuación diferencial y condiciones iniciales que gobiernan la evolución temporal del caudal $Q(t)$ que circula por el conducto inferior.
3. Calcule el valor del caudal en el régimen estacionario.
4. Dar $Q(t)$.

Cuestión

Un recipiente cúbico, de masa m, arista a y paredes sin espesor, repleto herméticamente de un líquido de densidad ρ_2, flota en la entrefase horizontal de dos fluidos de densidad ρ_1, ρ_3, siendo $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. El líquido 1 es el inferior, como se ve en la figura. Especificar la altura b que sobresale con respecto a la entrefase. Indicar la condición que ha de cumplir m para que el cuerpo esté situado a través de la entrefase.

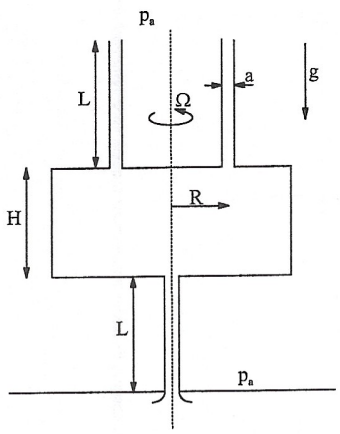


Figura Problema

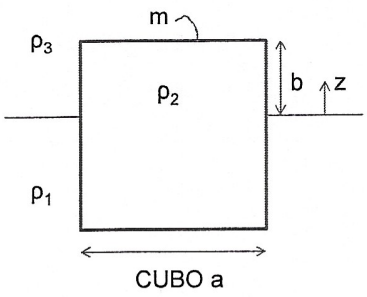
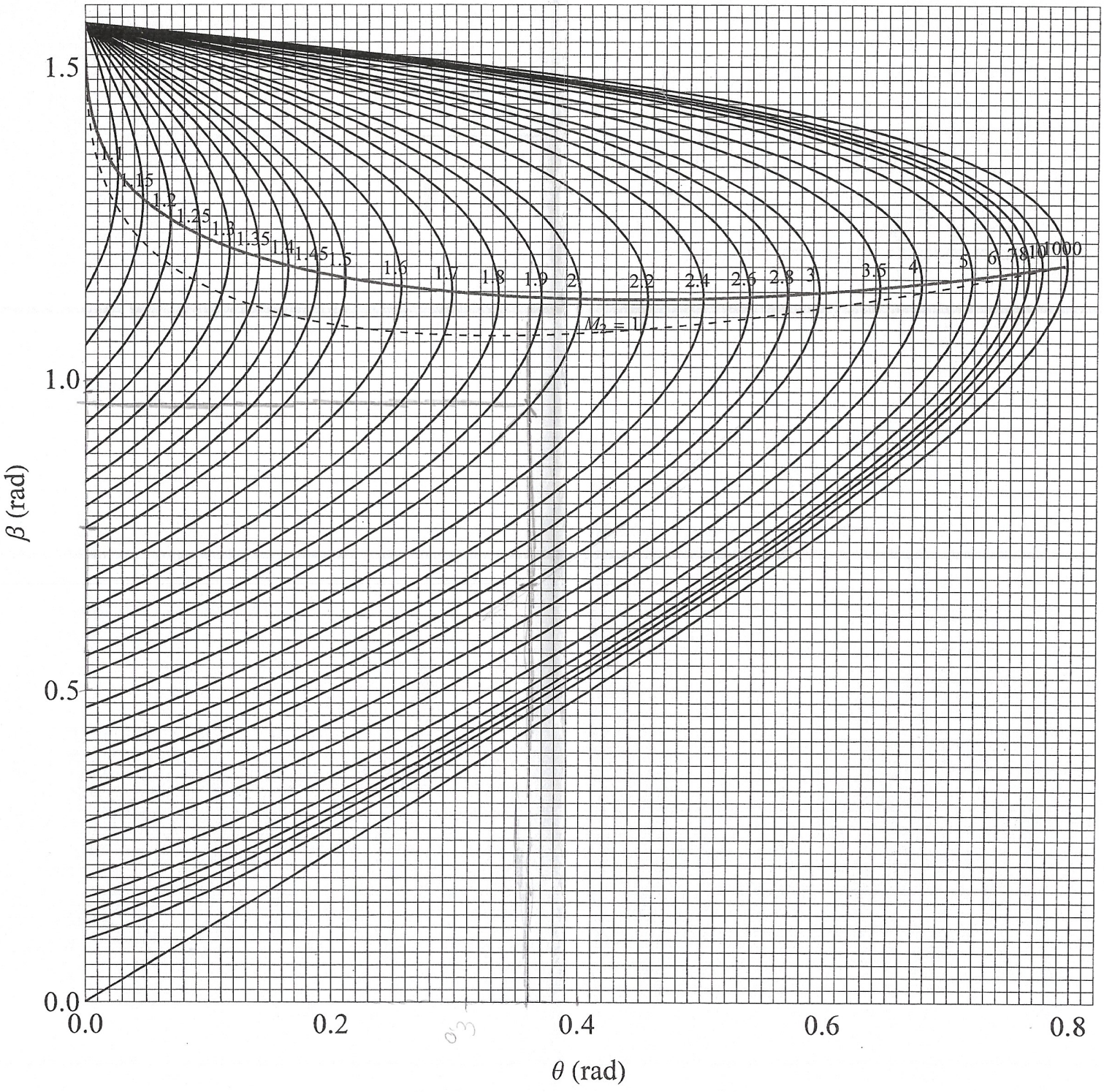


Figura Cuestión

1h

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

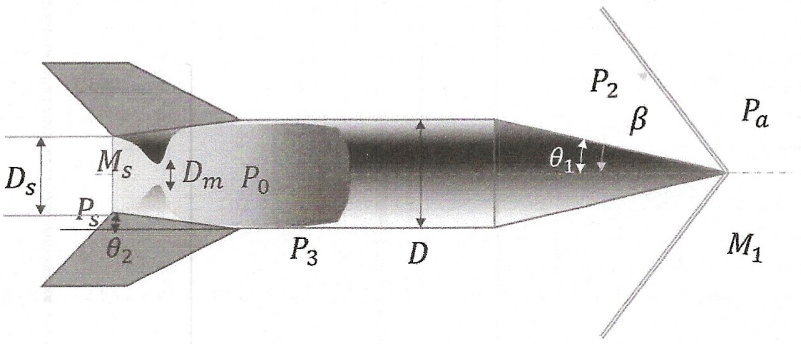
DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS *Segunda Convocatoria*	13/07/2026

Problema 3

Un cohete cilíndrico de diámetro D viaja horizontalmente en una atmósfera de constante adiabática γ y presión P_a a un Mach de vuelo M_1. En su extremo frontal lleva un cono de semiángulo θ_1. El combustible se quema a una velocidad constante en el interior del cohete, generando una presión de combustión constante P_0. Los gases de escape tienen una constante adiabática $\gamma = 1{,}4$, y escapan a través de una tobera convergente-divergente de diámetro de salida D_s. El cohete termina en su parte trasera en un tronco de cono de semiángulo θ_2 y base mínima de diámetro D_s (ver figura). Se pretende calcular la presión de la cámara de combustión P_0 y el diámetro mínimo D_m que mantienen el vuelo estacionario a Mach M_1 en condiciones de empuje **óptimo**. Para ello se pide:

1. Ángulo β de la onda de choque oblicua formada por el cono frontal (usando las expresiones de las ondas oblicuas planas), presión P_2 y Mach M_2 tras la onda de choque.
2. Presión P_3 y Mach M_3 tras el cono delantero, en la parte cilíndrica del cohete.
3. Presión P_4 y Mach M_4 en la superficie lateral del tronco de cono trasero.
4. Expresando la ecuación de balance de fuerzas en el cohete, calcular el número de Mach de descarga M_s y la presión P_0 de la cámara de combustión.
5. Calcular el diámetro mínimo D_m de la tobera.

Datos:
$D = 0{,}2$ m, $D_s = 0{,}14$ m, $\theta_1 = 0{,}35$ rad, $\theta_2 = 0{,}3$ rad, $P_a = 5 \times 10^4$ Pasc, $\gamma = 1{,}4$, $M_1 = 3$.

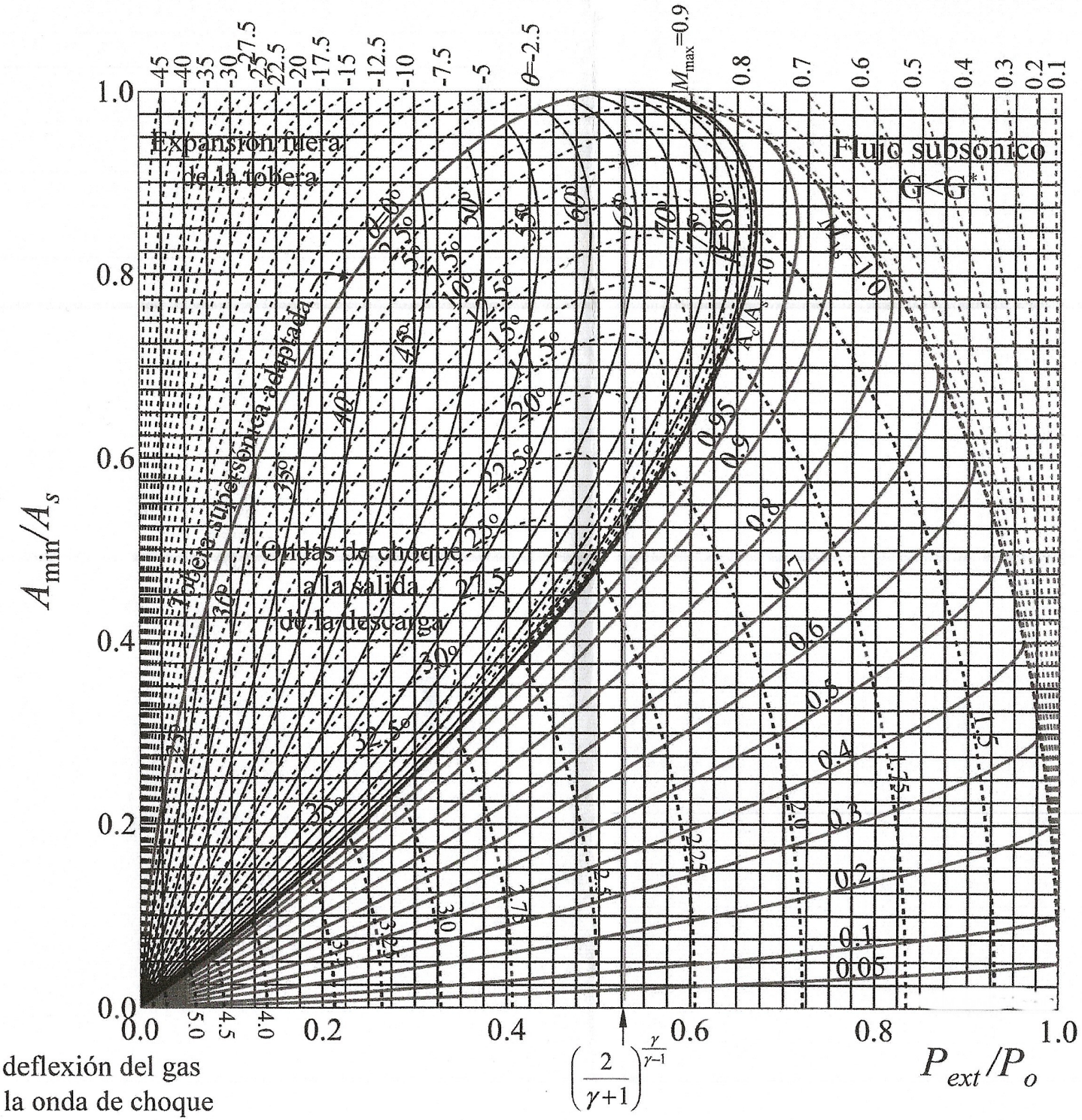


WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

γ=1.4



DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS *Segunda Convocatoria*	13/07/2026

Problema 2

Un sistema neumático como el de la figura consiste en un cilindro aislado térmicamente, de sección A, partido por una pared con un orificio de sección $A_m \ll A$. A un lado de la pared hay un recinto con un muelle interno de longitud relajada L, y un émbolo 1 sin fricción ni fugas que encierra al muelle. La presión P_1 y densidad ρ_1 iniciales del gas en ese recinto son conocidas (P_o y ρ_o, respectivamente), y la ley de Hook para el muelle es $F = k\ x$, con $k = cte$. Al otro lado de la pared, otro émbolo 2 sin fugas que está inicialmente junto a ella. A partir de un cierto instante, empieza a alejarse de la pared a velocidad U formando un recinto a presión P_2 con densidad ρ_2. La presión exterior a los dos émbolos es P_o.

1. Relación entre la presión P_1 y la densidad ρ_1 como función de P_o y ρ_o.
2. Relación entre la presión P_2 y la densidad ρ_2 como función de P_1 y ρ_1.
3. Expresión del desplazamiento $x(t)$ del muelle como función de ρ_1 y los demás parámetros conocidos.
4. Velocidad inicial mínima $U_{min}(0)$ para que, pasado un transitorio despreciable, tengamos flujo crítico en el orificio (orificio crítico).
5. Escribir la ecuación diferencial y condiciones iniciales que definen la evolución temporal de la densidad ρ_1 con el tiempo, así como la ecuación que define la velocidad mínima $U_{min}(t)$ del émbolo 2 para tener orificio crítico en cada instante.
6. Definiendo las variables $\phi = \rho_1/\rho_o$ y $\tau = t/t_o$, con

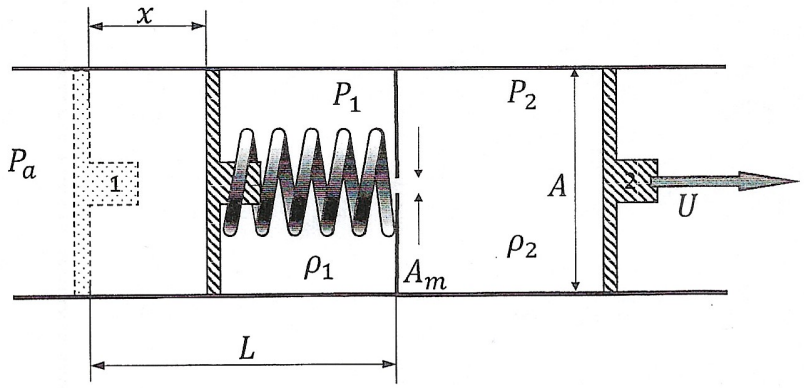
$$t_o = L\frac{A}{A_m}\left(\frac{\gamma P_a}{\rho_a}\right)^{-1/2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{(\gamma+1}{2(\gamma-1)}},$$

   a) Escribir la ecuación diferencial adimensional, con sus condiciones iniciales.

   b) Ingertar la ecuación diferencial y hallar la relación algebraica entre ϕ y τ.

   c) Potencia necesaria para desplazar el émbolo 2 a la velocidad mínima como función de ϕ y los demás parámetros conocidos.

$P_a = P_o$



WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS I Grado en Ingeniería Aeroespacial.	13/07/2026

Prontuario

Movimiento de fluidos en conductos con viscosidad dominante ($G = \rho v A$, A: sección del conducto; $q = vh$, h: espesor de la lámina):

- Sección circular: $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{128 \nu G}{\pi D^4}$
- Bidimensional (lámina entre placas): $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{12 \mu q}{h^3}$

Movimiento turbulento de fluidos en conductos:

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\rho \frac{dv^2}{ds} + \frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = \frac{-\lambda \rho v^2}{8 r_h}, \quad r_h = A/perim.$$

$$G = \rho v A$$

(Obviamente: fluidostática $\Longrightarrow v = 0$)

Flujo isentrópico de gases en toberas:

$$\frac{P_o}{P(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho_o}{\rho(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$G = (\gamma\, \rho_o P_o)^{1/2}\, A(s) M(s) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}, \; G^* = (\gamma\, \rho_o P_o)^{1/2}\, A_{min} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

Si $M_{max} = 1$, $\frac{A(s)}{A_{min}} = M(s)^{-1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$; $\quad e.g.: \frac{A(s)}{A_{min}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} M(s) = 2{,}1972 \\ M(s) = 0{,}3059 \end{cases}$

Evolución de depósitos (sin pérdidas en entrada, mismo gas en entrada y salida):

$$\frac{d(\rho V)}{dt} + G_s - G_e = 0$$

$$\frac{1}{\gamma - 1}\frac{d(PV)}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}\frac{d(\rho V)}{dt} + G_e\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} - h_{oe}\right) + P\frac{dV}{dt} = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + \frac{\gamma G_e}{\rho V}\left(1 - \frac{P_{ext}\rho}{P \rho_{ext}}\right) = \frac{(\gamma - 1)\dot{Q}}{PV}$$

Ondas de choque oblícuas ($M_{n1} = M_1 \sin\beta$):

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{\gamma + 1}\left(\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - \frac{\gamma - 1}{2}\right), \quad M_2 = \left(\frac{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2(\beta) + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - (\gamma - 1)}\right)^{1/2} / \sin(\beta - \theta)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2(\beta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \theta = \arctan\left\{2\left[\frac{(M_1 \sin\beta)^2 - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right] / \tan\beta\right\}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

13/07/26 2 convocatoria.

1. Valor de Ω_{min} para que el sistema permanezca en equilibrio.

Calculamos la distribución de presiones con la ecuación fundamental Fluidoestática:

$$P + \rho U = cte$$

$$\hookrightarrow U = \vec{g}\vec{x} + \cancel{\vec{\alpha}\vec{x}}^{\,0} - \frac{1}{2}|\vec{\Omega}\times\vec{x}|^2 = gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2$$

$$P + \rho\left[gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2\right] = cte$$

$$\hookrightarrow P(z=0, r=0) = Pa \rightarrow Pa = Pdp = cte$$

$$\hookrightarrow Ps\,(z = 2L+H,\ r=R) \rightarrow Ps + \rho\left[g(2L+H) - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2\right] = Pa$$

- $\Omega_{min} \rightarrow Ps = Pa$

$$\hookrightarrow \cancel{Pa} + \rho\left[g(2L+H) - \frac{1}{2}\Omega_{min}^2 R^2\right] = \cancel{Pa}$$

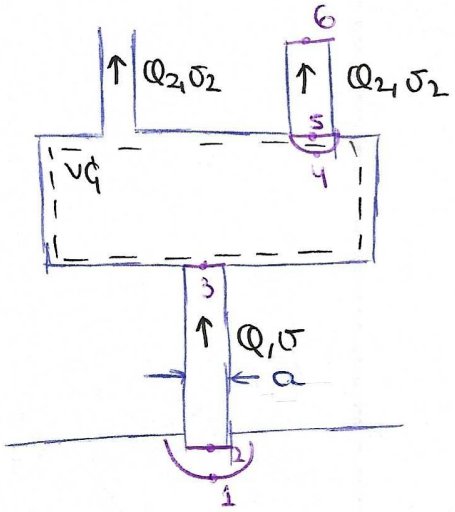
$$g(2L+H) = \frac{1}{2}\Omega_{min} R^2$$

$$\boxed{\Omega_{min} = \sqrt{\frac{2g(2L+H)}{R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{R}\sqrt{g(2L+H)}}$$

Movimiento turbulento con $\Omega > \Omega_{min}$

Al girar el sistema $\Omega > \Omega_{min}$ la fuerza centrífuga empuja el agua hacia arriba (hacia afuera); hacia el radio mayor donde están los conductos.

2. ED y Cl. de $Q(t)$



EC Masa:

$$\frac{d}{dt}(\cancel{V_C})^{\,0} - Qe + Qs = 0 \quad \text{: volumen cte}$$

$$Qe = Qs \rightarrow Q = 2Q_2 \quad \rightarrow Q_2 = Q/2$$

(1) $P_3 = Pa = P_2 + \frac{1}{2}\rho v^2(t)$

2-D3: Mov turbulento: con $r=0$

$$\rho\frac{dv}{dt} + \frac{d}{ds}\left(\cancel{\frac{1}{2}\rho v^2}^{\,0} + P + \rho\left[gz - \cancel{\frac{1}{2}\Omega^2 r^2}^{\,0}\right]\right) = -\frac{\lambda\rho v^2}{2a}$$

$$P_3 - P_2 + \rho g(z_3 - z_2) = -\frac{\lambda\rho v^2}{2a}L - \rho\frac{dv}{dt}L \rightarrow P_3 - P_2 + \rho gL = -\frac{\lambda\rho v^2}{2a}L - \rho\frac{dv}{dt}L \quad (2)$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

3-D4: Hidroestática: (depósito)

$$P_4 - P_3 = \rho\left[\tfrac{1}{2}\Omega^2(r_4^2 - r_3^2) - g(z_4 - z_3)\right]$$

$$P_4 - P_3 = \rho\tfrac{1}{2}\Omega^2 R^2 - \rho g H \quad (3)$$

$P + \rho U = cte \rightarrow P - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \rho g z = cte$ (Estamos en un depósito)

la velocidad $\cong 0$

↓

Situación de Fluidoestática.

igualamos

$$P_4 - \tfrac{1}{2}\rho\Omega^2 r_4^2 + \rho g z_4 = P_3 - \tfrac{1}{2}\rho\Omega^2 r_3^2 + \rho g z_3$$

$$P_4 - P_3 = \tfrac{1}{2}\rho\Omega^2[r_4^2 - r_3^2] + \rho g \underbrace{[z_3 - z_4]}_{-H}$$

4-D5: $P_4 = P_5 + \frac{1}{2}\rho v_2^2(t) \quad (4)$

5-D6: $$\rho\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial s}\left[\tfrac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho\left[gz - \tfrac{1}{2}\Omega^2 r^2\right]\right] = -\frac{\lambda\rho v_2^2}{2a}$$

$$P_6 - P_5 + \rho g(z_6 - z_5) - \rho\tfrac{1}{2}\Omega[r_6^2 - r_5^2] = -\frac{\lambda\rho v_2^2}{2a}L - \rho\frac{dv_2}{dt}L$$

($P_6 \to P_a$; $z_6 - z_5 \to L$; $r_6^2 - r_5^2 \to 0$ (están en la misma vertical))

$$P_a - P_5 + \rho g L = -\frac{\lambda\rho v_2^2}{2a}L - \rho\frac{dv_2}{dt} \quad (5)$$

$$P_a = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

$$-P_5 + P_2 + \rho g L = +\frac{\lambda\rho v^2}{2a}L + \rho\frac{dv}{dt}L$$

$$-P_4 + P_3 = -\rho\tfrac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \rho g H$$

$$P_4 = P_5 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$-P_a + P_5 + \rho g L = +\frac{\lambda\rho v_2^2}{2a}L + \rho\frac{dv_2}{dt}L$$

$$-2\rho g L = \tfrac{1}{2}\rho v^2\left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right] + \rho\frac{dv}{dt}L - \rho\tfrac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \rho g H + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2\left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right] + \rho\frac{dv_2}{dt}$$

$$-g(2L + H) = \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right]\left[v^2 + v_2^2\right] - \tfrac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \frac{dv}{dt}L + \frac{dv_2}{dt}L$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q(t)}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4Q(t)}{\pi a^2} \; ; \; v^2 = \frac{16}{\pi^2 a^4} Q^2(t) \; ; \; \frac{dv}{dt} = \frac{4}{\pi a^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4Q_2}{\pi a^2} = \frac{4}{\pi a^2} \cdot \frac{Q}{2} = \frac{2Q}{\pi a^2}$$

$$\hookrightarrow v_2^2 = \frac{4Q^2}{\pi^2 a^4} \; ; \; \frac{dv_2}{dt} = \frac{2}{\pi a^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$-g[2L+H] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right]\left[\frac{16}{\pi^2 a^4} Q^2(t) + \frac{4}{\pi^2 a^4} Q^2\right] - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \frac{4L}{\pi a^2}\frac{dQ}{dt} + \frac{2L}{\pi a^2}\frac{dQ}{dt}$$

$\rightarrow 20/\pi^2 a^4 \, Q^2$

$$-g[2L+H] = \left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right] \frac{10}{\pi^2 a^4} Q^2(t) - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \frac{6L}{\pi a^2}\frac{dQ}{dt}$$

$$Q(0) = 0$$

3. Calcula el caudal en regimes estacionario:

regimen estacionario: Q_{est}: $\frac{dQ}{dt} = 0$

$$-g[2L+H] = \left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right] \frac{10}{\pi^2 a^4} Q_{est}^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2$$

$$Q_{est}^2 = \sqrt{\frac{-g[2L+H] + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2}{\left(1 + \frac{\lambda L}{a}\right)\frac{10}{\pi^2 a^4}}}$$

4. $Q(t)$:

$$\underbrace{-g[2L+H] + \frac{1}{2}\Omega R^2}_{c} = \underbrace{\left[1 + \frac{\lambda L}{a}\right] \cdot \frac{16}{\pi^2 a^4}}_{b} Q^2(t) + \underbrace{\frac{6L}{\pi a^2}}_{a} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$c = b Q^2(t) + a \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$c - bQ^2 = a\frac{dQ}{dt} \rightarrow dt = a \cdot \frac{1}{c - bQ^2} \cdot dQ$$

$$dt = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{b} - Q^2} dQ \qquad \frac{c}{b} = Q_{est}^2$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$$dt = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{Q_{est}^2 - Q^2}\,dQ \rightarrow \frac{b}{a}\,dt = \frac{1}{Q_{est}^2 - Q^2}\,dQ$$

$$\frac{b}{a}\int_0^t dt = \int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{Q_{est}^2 - Q^2} \Rightarrow \frac{b}{a}t = \frac{1}{Q_{est}}\cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{Q}{Q_{est}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{b\cdot Q_{est}}{a}t = \operatorname{arctanh}\left(\frac{Q}{Q_{est}}\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{Q(t) = Q_{est}\cdot \tanh\left[\frac{b}{a}Q_{est}\cdot t\right]}$$

Cuestión:

Especificar la altura b y condición que ha de cumplir para que el cuerpo este atravesado entre en la entrefase.

$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

$N = E$; $W = m\cdot g + \rho_2\cdot a^3$

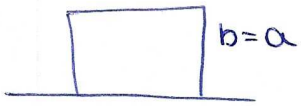
$E = \rho_3\cdot g\cdot a^2 b + \rho_1\cdot g\, a^2(a-b)$

$$mg + g\rho_2 a^3 = \rho_3 g a^2 b + \rho_1 g a^3 - \rho_1 g a^2 b$$

$$m + a^3[\rho_2 - \rho_1] = b[\rho_3 a^2 - \rho_1 a^2]$$

$$\boxed{b = \frac{m + a^3[\rho_2 - \rho_1]}{a^2[\rho_3 - \rho_1]}}$$

→ condición $m_{mín}$

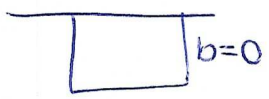


$$a = \frac{m + a^3[\rho_2 - \rho_1]}{a^2[\rho_3 - \rho_1]}$$

$$a^3[\rho_3 - \rho_1] - a^3[\rho_2 - \rho_1] = m \rightarrow a^3[\rho_3 - \rho_2] = m_{mín}$$

→ N_{max}:

$$m = -a^3[\rho_2 - \rho_1] = a^3[\rho_1 - \rho_2]$$ <0 no es posible



$$\boxed{0 < m < [\rho_3 - \rho_2]a^3}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

13/07/20. Problema 3:

1. Ángulo de la onda choque β_3 y P_2 y M_2.

$$\theta_1 = 0'35 \text{ rad} = \arctan\left[2 \cdot \frac{(3\operatorname{sen}(\beta))^2 - 1}{3^2 \cdot (1{,}4 + \cos(2\beta)) + 2}\right] \Rightarrow \tan\beta \Rightarrow \beta = 0'660 \text{ rad}.$$

$M_1 = 3$

$$\frac{P_2}{P_a} = \frac{2}{2{,}4}\left[1{,}4 \cdot (3 \cdot \operatorname{sen}(0'66))^2 - 0'2\right] = 3'7804$$

$$P_2 = 3'7804 \cdot 5 \cdot 10^4 = 189020 \text{ Pasc.}$$

$$1'89 \cdot 10^5 \text{ Pasc.}$$

$$M_2 = \frac{\left[\dfrac{0{,}4 \cdot (3 \cdot \operatorname{sen}(0'66))^2 + 2}{2 \cdot 2{,}4 \cdot (3\operatorname{sen}(0'66))^2 - 0{,}4}\right]^{1/2}}{\operatorname{sen}(0'66 - 0'35)} = 1'993$$

2. P_3 y M_3.

Onda de expansión de 2 a 3:

$$\theta_1 = 0'35 = \sqrt{\frac{2{,}4}{0{,}4}} \cdot \arctan\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \overbrace{(M_3^2 - 1)^{1/2}}^{x}\right] - \arctan\overbrace{(M_3^2 - 1)^{1/2}}^{x}$$

$\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$-\left[\sqrt{6} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1'993^2 - 1}\right] - \operatorname{arctg}\left[(1'993^2 - 1)^{1/2}\right]\right]$$

$$-0'457043$$

$$\Rightarrow 0'35 = \sqrt{6} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot x\right] - \operatorname{arctg}(x) - 0'457043 \quad (A)$$

$$\hookrightarrow x = 2'64083 \quad (B) \quad = \sqrt{M_3^2 - 1} \rightarrow M_3 = 2'824$$

$$P_{03} = P_{02} \rightarrow P_3 \cdot \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = P_2 \cdot \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{P_3}{P_2} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[\frac{1 + 0'2 \cdot 1'993^2}{1 + 0'2 \cdot 2'824^2}\right]^{\frac{1{,}4}{0{,}4}} = 0'2749$$

$$P_3 = 0'2749 \cdot 1'89 \cdot 10^5 = 51964 \text{ Pasc.} = 5'19 \cdot 10^4 \text{ Pasc.}$$

WOOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

3. P_4 y M_4.

3-D4 onda de expansión con $\theta_2 = 0'3$ rad: con $x_4 = \sqrt{M_4^2 - 1}$

$$0'3 \text{ rad} = \sqrt{6} \cdot \text{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (x_4)\right] - \text{arctg}[x_4]$$

$$-\left[\sqrt{6} \cdot \text{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2'824^2 - 1}\right] - \text{arctg}\left[\sqrt{2'824^2 - 1}\right]\right.$$

$$-0'807\,106 \text{ (A)}$$

$x_4 = 3'16945$ (B) $= \sqrt{M_4^2 - 1} \rightarrow M_4 = 3'827$

$$\frac{P_4}{P_3} = \left[\frac{1 + 0'2 \cdot 2'824^2}{1 + 0'2 \cdot 3'827^2}\right]^{\frac{1,4}{0,4}} = 0'2341 \rightarrow P_4 = 0'2341 \cdot 51964 = 12165 \text{ Pas}$$

$1'22 \cdot 10^4$ Pasc.

4. Balance de fuerzas, calcular el número de Mach M_S y P_0 de la cámara combustión par un empuje óptimo.

Empuje optimo: $P_S = P_4 = 1'22 \cdot 10^4$ Pasc.

$E = D$

$$E = G_S \cdot U_S - \cancel{G_e U_e}^{\,0} + (P_S - \cancel{P_{ext}}^{\,0}) A_S = \rho_S U_S^2 A_S = \rho_S A_S \cdot M_S^2 \cdot \frac{P_S}{\rho_S} \gamma = \gamma M_S^2 \cdot A_S P_S$$

$$D = P_2 \cdot A - P_4 (A - A_S)$$

$$\gamma M_S^2 \cdot A_S P_4 = P_2 A - P_4 (A - A_S)$$

$$1'4 \cdot M_S^2 \cdot \frac{\pi D_S^2}{4} \cdot P_4 = P_2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} - P_4 \left[\frac{\pi}{4}(D^2 - D_S^2)\right]$$

$$1'4 \cdot M_S^2 \cdot \frac{\pi (0,14)^2}{4} \cdot 1'22 \cdot 10^4 = 1'89 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{(0'2)^2}{4} - 122 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{4}\left[0'2^2 - 0,14^2\right]$$

$\rightarrow M_S = 4'67$

$$\frac{P_0}{P_S} = \left[1 + 0'2 \cdot 4'67^2\right]^{\frac{1,4}{0,4}} = 356'929$$

$P_0 = 1'22 \cdot 10^4 \cdot 356'929 = 4'35 \cdot 10^6$ Pasc.

5. Dm tobera:

$$\frac{D_S^2}{D_m^2} = \frac{1}{M_S}\left[\frac{1 + 0'2 M_S^2}{2,4/2}\right]^{\frac{2,4}{2 \cdot 0,4}} \rightarrow D_m = 0'032 \text{ m}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Problema 2 13/07/26

1 Relación de P_1 y ρ_1 como función de P_0 y ρ_0



Ec. Masa al VC1: $\frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) - \cancel{G_e}^{0} + G_s = 0$

$$-G_s = \frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) = \rho_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} + V_1 \cdot \frac{d\rho_1}{dt}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}[P_1 V_1] = \cancel{G_e u_e}^{0} - G_s u_s - P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} + \cancel{\dot{Q}}^{0} \text{ (aislado térmicamente)}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{dP_1}{dt} V_1 + \frac{1}{\gamma-1} P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} = -G_s \cdot u_s - P_1 \frac{dV_1}{dt}$$

$u_s = u_1 = c_v T_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} R_g T_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1}$ (P_1/ρ_1)

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{dP_1}{dt} V_1 + \frac{1}{\gamma-1} P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left[\rho_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 \frac{d\rho_1}{dt}\right] - P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma-1}\frac{dP_1}{dt} V_1 + \frac{1}{\gamma-1} P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} + P_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_1 \frac{dV_1}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1} V_1 \cdot \frac{d\rho_1}{dt}$$

$$P_1 \frac{dV_1}{dt}\left[\frac{1}{\gamma-1} + 1\right] = \frac{1+\gamma-1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_1 \frac{dV_1}{dt}$$

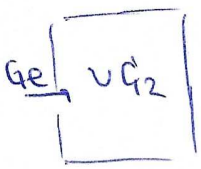
$$\frac{1}{\cancel{\gamma-1}}\frac{dP_1}{dt} \cancel{V_1} = \frac{\gamma}{\cancel{\gamma-1}}\frac{P_1}{\rho_1} \cancel{V_1} \frac{d\rho_1}{\cancel{dt}} \Rightarrow dP = \frac{\gamma P_1}{\rho_1} d\rho_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P_1} = \gamma \frac{d\rho_1}{\rho_1} \Rightarrow \int_{P_1(0)=P_0}^{P_1} \frac{dP}{P_1} = \gamma \int_{\rho_1(0)=\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\rho_1} \Rightarrow \ln\left[\frac{P_1}{P_0}\right] = \gamma \ln\left[\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]^{\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}} = \frac{P_0}{\rho_0^{\gamma}}}$$ Proceso isentrópico.

2. Relación de P_2 y ρ_2 como función de P_1 y ρ_1.

Aplicamos Balance Masa y energía al recuento 2:



Ec. Masa: $\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2) - G_e + \cancel{G_s}^{0} = 0$

$$G_e = V_2 \cdot \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 \frac{dV_2}{dt}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Ec. Balance energía: (No)

$$\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{d}{dt}[P_2V_2] = G_{e\,uoe} - \cancel{G_{s\,uos}}^{\,0} + \dot{Q} - P_2\frac{dV_2}{dt}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{dP_2}{dt}V_2 + \frac{dV_2}{dt}P_2\right] = G_{e\,uoe} + \cancel{\dot{Q}}^{\,0} - P_2\frac{dV_2}{dt}$$

u_{oe} = "como es la de entrada es la del reinto 1"

$$u_{oe} = u_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{P_1}{\rho_1}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}+1 = \frac{1+\gamma-1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{dP_2}{dt}V_2 + \frac{dV_2}{dt}P_2\frac{1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{P_1}{\rho_1}\left[V_2\cdot\frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2\cdot\frac{dV_2}{dt}\right] - P_2\frac{dV_2}{dt}$$

$$\cancel{\frac{1}{\gamma-1}}\cdot\cancel{\frac{dP_2}{dt}}V_2 + \cancel{\frac{\gamma}{\gamma-1}}P_2\cancel{\frac{dV_2}{dt}} = \cancel{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{P_1}{\rho_1}\left[V_2\cdot\cancel{\frac{d\rho_2}{dt}} + \rho_2\cdot\cancel{\frac{dV_2}{dt}}\right]$$

$$dP_2V_2 + \gamma P_2\,dV_2 = \frac{\gamma P_1}{\rho_1}\left[V_2\cdot d\rho_2 + \rho_2\,dV_2\right]$$

$$dP_2V_2 + \gamma P_2dV_2 - \frac{\gamma P_1}{\rho_1}V_2\,d\rho_2 - \frac{\gamma P_1}{\rho_1}\rho_2\,dV_2 = 0$$

dividimos V_2

$$dP_2 + \frac{\gamma}{V_2}P_2\,dV_2 - \frac{\gamma P_1}{\rho_1}d\rho_2 - \frac{\gamma P_1}{\rho_1 V_2}\rho_2\,dV_2 = 0$$

$$dP_2 - \frac{\gamma P_1}{\rho_1}d\rho_2 + \frac{dV_2\,\gamma}{V_2}\left[P_2 - \cancel{\frac{P_1}{\rho_1}\rho_2}^{\,0}\right] = 0$$

$$P_2 - \frac{P_1}{\rho_1}\rho_2 = 0$$

$$\left[P_2 = \frac{P_1}{\rho_1}\rho_2\right]$$

↳ $P_2 - P_2 = 0$

↳ $P_2 - R_g T_1\cdot\rho_2 \Rightarrow P_2 - R_g T_1\cdot\frac{P_2}{R_g\gamma T_2}$

↳ $T_1 = T_2$

→ como $A \gg A_m$ se conserva la energía de remanso

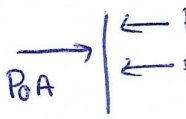
$T_1 = T_2 \rightarrow P_2 = \frac{P_1}{\rho_1}\rho_2$.

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

3. $x(t)$ = en función ρ_1.

TCM al émbolo:



$$-F_m - P_1 A + P_0 A = 0 \quad \text{(asumiendo cte)}$$

$$F_m = (P_0 - P_1) A$$

$$k \cdot x = (P_0 - P_1) \cdot A$$

$$x = \frac{(P_0 - P_1) \cdot A}{k}$$

En función de ρ_1: $x(t) = \frac{A}{k} P_0 \left[1 - \frac{P_1}{P_0}\right] = \frac{AP_0}{k} \cdot \left[1 - \left[\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]^{\gamma}\right] = x(t)$

4. Velocidad mínima $V_{min}(0)$, (instante inicial) (Pasado un transitorio despreciable) tengamos un orificio crítico.

$$G_0^* = \sqrt{\gamma R g T_0} \cdot \rho_0 \, Am \cdot \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_0^2} \cdot Am \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

$$\Rightarrow G^* = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0} \cdot Am \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

Ec. Masa $v_{G2} = 0$

$$\rho_2 \cdot \frac{dV_2}{dt} - G_e + G_s = 0 \rightarrow \rho_2 A \cdot v = G_e = G^*$$

$$V_{min}(0) = \frac{G^*}{\rho_2 A} = \frac{\sqrt{\gamma R \rho_0 \rho_0} \cdot Am \cdot \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}{\rho_2 A}$$

5. EDy Cd de ρ_1, así como $V_{min}(t)$ para tener un orificio crítico en cada instante.

Recinto 1:

$$\frac{d(m_1)}{dt} = \frac{dm_1}{d\rho_1} \cdot \frac{d\rho_1}{dt} = -G_1^*$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) - G_e + G_s = 0 \rightarrow \rho_1 A(L-x) = \rho_1 A \left[L - \frac{AP_0}{k}\left[1 - \left[\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]^{\gamma}\right]\right]$$

$$A\left[\rho_1\left[L - \frac{AP_0}{k}\right] + \rho_1 \frac{AP_0}{k\rho_0^{\gamma}} \rho_1^{\gamma}\right] = A\left[\rho_1\left[L - \frac{AP_0}{k}\right] + \frac{AP_0}{k\rho_0^{\gamma}} \rho_1^{\gamma+1}\right]$$

$$\frac{d(\,)}{d\rho_1} = A\left[L - \frac{AP_0}{k} + (\gamma+1)\frac{AP_0}{k\rho_0^{\gamma}} \cdot \rho_1^{\gamma}\right] = A\left[L - \frac{AP_0}{k} + (\gamma+1)\frac{AP_0}{k}\left[\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]^{\gamma}\right]$$

$$G_S = G_1^* = Am \rho_1 a_1 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = Am \sqrt{P_1 \rho_1 \gamma} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma R g T_1} = \sqrt{\gamma \frac{P_1}{\rho_1}}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

- $\frac{de_1}{dt} = -\frac{Am\sqrt{\gamma P_1 e_1}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}{A\left[L-\frac{AP_0}{\mu}+(\gamma+1)\frac{AP_0}{\mu}\left[\frac{e_1}{e_0}\right]^{\gamma}\right]}$ $\qquad e_1(0)=e_0$

$$U_{min}(t) = \frac{G_1^*}{e_2 A} = \frac{Am\sqrt{\gamma P_1 e_1}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}{e_2 A.}$$

6.

$e_1 = e_0\cdot\phi$

$\tau = t/t_0 \rightarrow dt = t_0 d\tau$ $\Big\}$ $\frac{de_1}{dt} = \frac{e_0}{t_0}\cdot\frac{d\phi}{d\tau}$

$$t_0 = L\cdot\frac{A}{Am}\left[\frac{\gamma P_a}{e_a}\right]^{-1/2}\cdot\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \rightarrow \frac{L}{t_0} = \frac{Am}{A}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}\cdot a_0$$

$L a_0^{-1}$

$$\rightarrow \frac{de_1}{dt} = -\frac{Am\, e_0\, a_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}\cdot\left(\frac{e_1}{e_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{A\left[L-\frac{P_0A}{\mu}+(\gamma+1)\frac{P_0A}{\mu}\left[\frac{e_1}{e_0}\right]^{\gamma}\right]} = \frac{e_0}{t_0}\cdot\frac{d\phi}{d\tau}$$

($\frac{L}{t_0}$; $\phi^{\frac{\gamma+1}{2}}$; ϕ^{γ})

a)
$$\left[\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{-L\,\phi^{\frac{\gamma+1}{2}}}{L-\frac{P_0A}{\mu}+(\gamma+1)\frac{P_0A}{\mu}\left[\phi^{\gamma}\right]}\right] \qquad \phi(0) = \frac{e_0}{e_0} = 1.$$

b)
$$\left[\left(1-\frac{P_0A}{\mu L}\right)\phi^{-\frac{(\gamma+1)}{2}} + (\gamma+1)\frac{P_0A}{\mu L}\phi^{\gamma-\frac{(\gamma+1)}{2}}\right]d\phi = -d\tau$$

($2\gamma-\gamma-1 = \frac{\gamma-1}{2}$)

$$\int_1^{\phi}\left(1-\frac{P_0A}{\mu L}\right)\phi^{-\frac{(\gamma+1)}{2}}d\phi + \int_1^{\phi}(\gamma+1)\frac{P_0A}{\mu L}\phi^{\frac{\gamma-1}{2}}d\phi = -\int_0^{\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\left[\left[1-\frac{P_0A}{\mu L}\right]\left[\frac{\phi^{-\frac{\gamma+1}{2}+1}-1}{-\frac{\gamma+1}{2}}\right] + \frac{P_0A}{\mu L}(\gamma+1)\cdot\left[\frac{\phi^{\frac{\gamma+1}{2}-1}}{\frac{\gamma+1}{2}}\right] = -\tau\right]$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

c): $F_2 = (P_2 - P_0)A$

$$P_2(\phi) = P_1 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_0 \phi^{\gamma} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$W = F_2 \cdot V_{min}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.