# 2oConvo-2025-Problema-3.pdf

quesitoo_

Mecánica de Fluidos I

2º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Accede al documento original

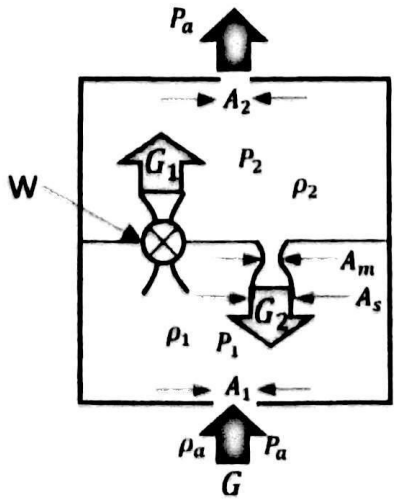
Reservados todos los derechos.
**No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.**

| DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS | MECÁNICA DE FLUIDOS I SEGUNDA CONVOCATORIA | 11/07/2025 |
|---|---|---|

## Problema 3

El sistema neumático de la figura consta de dos depósitos (1 y 2) conectados por (i) una tobera convergente-divergente de área mínima $A_m$ y de salida $A_s$, y (ii) un compresor ideal (potencia conocida $W$), que trasvasa el aire ($\gamma = 1{,}4$) del depósito 1 al 2. Los depósitos tienen sendos orificios de áreas $A_1$ y $A_2$ que comunican con el exterior, a presión $P_a$ y densidad $\rho_a$ conocidas. El sistema está aislado y funciona en régimen estacionario. Se desea operar de tal forma que (i) el gasto $G$ que circule a través del sistema sea simultáneamente el mínimo independiente de $P_a$ y $P_2$, y (ii) que la tobera de esté *adaptada*, para lo cual es necesario diseñarla ($A_{min}$ y $A_s$) cuidadosamente. Para ese cálculo, obtenga como función de los datos conocidos:

1. Las presiones $P_1$ y $P_2$ de ambos depósitos.
2. El gasto $G$ que circula a través del sistema.
3. Densidad $\rho_2$ del aire en el depósito 2. Para ello, use la conservación de la masa a través del sistema.
4. Densidad $\rho_1$ del aire en el depósito 1. Para ello, considere el compresor isentrópico.
5. Gasto $G_1$ que circula a través del compresor.
6. Gasto $G_2$ que circula a través de la tobera.
7. Área mínima $A_{min}$ de la tobera.
8. El número de Mach de descarga de la tobera a través del área $A_s$ (ver punto 1). Comprobar que es supersónico para $\gamma = 1{,}4$
9. Área de descarga $A_s$ de la tobera.




WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

| DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS | EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS I<br>*Grado en Ingeniería Aeroespacial.* | 11/07/2025 |
|---|---|---|

## Prontuario

Movimiento de fluidos en conductos con viscosidad dominante ($G = \rho v A$, $A$: sección del conducto; $q = vh$, $h$: espesor de la lámina):

- Sección circular: $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{128 \nu G}{\pi D^4}$
- Bidimensional (lámina entre placas): $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{12 \mu q}{h^3}$

Movimiento turbulento de fluidos en conductos:

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\rho \frac{dv^2}{ds} + \frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = \frac{-\lambda \rho v^2}{8 r_h}, \quad r_h = A/perim.$$

$$G = \rho v A$$

(Obviamente: fluidostática $\Longrightarrow v = 0$)

Flujo isentrópico de gases en toberas:

$$\frac{P_o}{P(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad , \quad \frac{\rho_o}{\rho(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$G = (\gamma \rho_o P_o)^{1/2} A(s) M(s) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}, \; G^* = (\gamma \rho_o P_o)^{1/2} A_{min} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{A(s)}{A_{min}} = M(s)^{-1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \; ; \quad e.g.: \frac{A(s)}{A_{min}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} M(s) = 2{,}1972 \\ M(s) = 0{,}3059 \end{cases}$$

Evolución de depósitos (sin pérdidas en entrada, mismo gas en entrada y salida):

$$\frac{d(\rho V)}{dt} + G_s - G_e = 0$$

$$\frac{1}{\gamma - 1}\frac{d(PV)}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}\frac{d(\rho V)}{dt} + G_e \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} - h_{oe}\right) + P\frac{dV}{dt} = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + \frac{\gamma G_e}{\rho V}\left(1 - \frac{P_{ext}\rho}{P \rho_{ext}}\right) = \frac{(\gamma - 1)\dot{Q}}{PV}$$

Ondas de choque oblícuas ($M_{n1} = M_1 \sin\beta$):

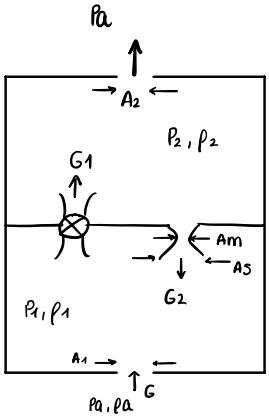
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{\gamma + 1}\left(\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - \frac{\gamma - 1}{2}\right), \quad M_2 = \left(\frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2(\beta) + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - (\gamma - 1)}\right)^{1/2} / \sin(\beta - \theta)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2(\beta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \theta = \arctan\left\{2\left[\frac{(M_1 \sin\beta)^2 - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right] / \tan\beta\right\}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

## 2°CONVO 2025 Problema 3




compreso ideal
$\gamma = 1,4$
[régimen estacionario]
sistema aislado

$G \neq G(P_a, P_2)$
Tobera adaptada

w dato

### Apartado 1 $P_1, P_2$

cogemos VC todo el sistema = Depósito 1 + Depósito 2
Ec. masa de sistema: $\frac{d}{dt}(\rho V) + G_s - G_e = 0$
$G_s = G_e = G = G^*$

Analizamos la entrada al depósito 1 mediante una tobera convergente

$$\frac{P_0}{P_s} = \frac{P_a}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2,4}{2}\right)^{\frac{1,4}{0,4}} = 1,893$$

tobera adaptada

$$P_1 = P_a \left(\frac{2,4}{2}\right)^{\frac{-1,4}{0,4}} \overset{M_s=1}{=} 0,528\, P_a \qquad \boxed{P_1 = 0,528\, P_a}$$

Analizamos la salida del depósito 2 mediante una tobera convergente

$$\frac{P_0}{P_s} = \frac{P_2}{P_a} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,893 \qquad \boxed{P_2 = 1,893\, P_a}$$

### Apartado 2

$$G = G^* = (\gamma \rho_a P_a)^{1/2} A_m \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = (\gamma \rho_a P_a)^{1/2} A_1\, 0,579 = (\rho_a P_a)^{1/2}\, 0,685\, A_1$$

$$\boxed{G^* = (\rho_a P_a)^{1/2}\, 0,685\, A_1}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

## Apartado 3

$G_e = G_s = G^*$

$G_e = (\rho_a p_a)^{1/2}\ 0{,}685\ A_1$

$G_s = (\gamma \rho_2 p_2)^{1/2}\ A_2\ 0{,}579 = (\rho_2\ 1{,}893\ p_a)^{1/2}\ A_2\ 0{,}685$ } igualamos

$$(\rho_a p_a)^{1/2}\ 0{,}685\ A_1 = (\rho_2\ 1{,}893\ p_a)^{1/2}\ A_2\ 0{,}685$$

$$p_a A_1^2 = \rho_2 \cdot 1{,}893\ A_2^2$$

$$\boxed{\rho_2 = \rho_a \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 0{,}528}$$

## Apartado 4

compresor isentrópico $\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$

$$\rho_1 = \rho_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = 0{,}528\ \rho_a \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = 0{,}528\ \rho_a \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 0{,}279^{1/1{,}4}$$

$$\boxed{\rho_1 = 0{,}2121\ \rho_a \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}$$

## Apartado 5 $G_1$

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ G_1\ \frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = 3{,}5\ G_1\ \frac{0{,}528 p_a}{0{,}2121\ \rho_a \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}\left[\left(\frac{1{,}893}{0{,}528}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} - 1\right]$$

$$w = 8{,}713\ G_1\ \frac{p_a}{\rho_a}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 0{,}44$$

$$w = 3{,}835\ G_1\ \frac{p_a}{\rho_a}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

$$\boxed{G_1 = 0{,}26\ w\ \frac{\rho_a}{p_a}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}$$

## Apartado 6

ecuaciones de masa depósito 2

$$\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2) + G_s - G_e = 0$$

$$G_s = G_e$$

$$G + G_2 = G_1$$

$$\boxed{G_2 = G_1 - G}$$

↳ $G_1$ conocido (apartado 5)

↳ $G$ conocido (apartado 2)

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

## Apartado 7 Am

$$\frac{A_S}{A_m} = \frac{1}{M_S}\left(\frac{1{,}2}{1+0{,}2M_S^2}\right)^{-3}$$

$$\frac{P_0}{P_S} = \frac{P_2}{P_1} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_S^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \longrightarrow \frac{1{,}893\,Pa}{0{,}528\,Pa} = 3{,}58 = (1+0{,}2M_S^2)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}}$$

tobera adaptada

$$[M_S = 1{,}48]$$

$$\frac{A_S}{A_m} = \frac{1}{1{,}48}\left(\frac{1{,}2}{1+0{,}2\cdot 1{,}48^2}\right)^{-3} = 1{,}163$$

$$[A_m = 0{,}86\,A_S]$$ son desconocidos $A_m, A_S$

Probamos otro camino:

$$G_2 = (\gamma\rho_2 P_2)^{1/2} A_m \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$G_2 = G_1 - G = 0{,}26W\frac{\rho_a}{p_a}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - (\rho_a p_a)^{1/2}\,0{,}685\,A_1$$

Por tanto:

$$0{,}26W\frac{\rho_a}{p_a}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - (\rho_a p_a)^{1/2}\,0{,}685\,A_1 = (\gamma\rho_2 P_2)^{1/2} A_m \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$\longrightarrow \rho_2, P_2$ conocidos $\longrightarrow$ sacaríamos $A_m$

## Apartado 8

$M_S = 1{,}48$ salida supersónica

## Apartado 9

$A_m = 0{,}86 A_S \longrightarrow A_S = 1{,}163\,A_m$

↓

apartado 7

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.