2oConvo-2025-Problema-2.pdf

quesitoo_

Mecánica de Fluidos I

2º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Accede al documento original

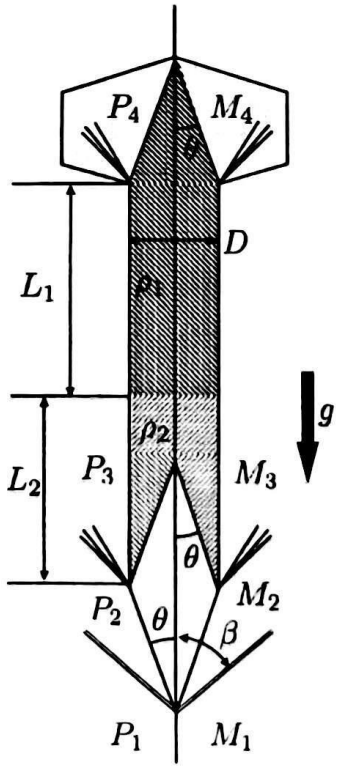
Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	MECÁNICA DE FLUIDOS I SEGUNDA CONVOCATORIA	11/07/2025

Problema 2

Un proyectil de diámetro $D = 0{,}6$ m, consta de (i) un peso-pistón de densidad $\rho_1 = 19 \times 10^3$ kg/m^3, con una parte cilíndrica de longitud $L_1 = 1{,}5$ m y un cono trasero, y (ii) una carga hueca de longitud $L_2 = 1{,}5$ m y densidad $\rho_2 = 2 \times 10^3$ kg/m^3, cuyo hueco es un cono como se describe en la figura. El proyectil tiene una carcasa frontal cónica de peso despreciable. Todos los conos del proyectil tienen de semiángulo $\theta = 0{,}2$. El proyectil cae por su peso a un número de Mach $M_1 = 7$ en una atmósfera a presión P_1 bajo la acción de la gravedad $g = 9{,}8$ m/s^2. Se pide:

1. Ángulo de la onda de choque oblícua del cono frontal (supongan aproximación bidimensional).
2. Número de Mach M_2 tras la onda de choque oblícula frontal.
3. Número de Mach M_4 en el cono trasero del proyectil.
4. Si la temperatura del aire ($\gamma = 1{,}4$, $R_g = 287$ J/kg/K) a nivel del mar es $T_o = 288$ K, con presión $P_o = 1{,}012 \times 10^5$ Pasc., y la temperatura desciende con la altura 6.2 K por kilómetro, ¿a qué altura estaría descendiendo el proyectil bajo las condiciones anteriores? Para ello, calcule:
   a) La masa del proyectil.
   b) La presión P_1 del aire, suponiendo caída estacionaria.
   c) La altura H respecto del nivel del mar para tener dicha presión P_1.



WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS I *Grado en Ingeniería Aeroespacial.*	11/07/2025

Prontuario

Movimiento de fluidos en conductos con viscosidad dominante ($G = \rho v A$, A: sección del conducto; $q = vh$, h: espesor de la lámina):

- Sección circular: $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{128 \nu G}{\pi D^4}$
- Bidimensional (lámina entre placas): $\frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = -\frac{12 \mu q}{h^3}$

Movimiento turbulento de fluidos en conductos:

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\rho \frac{dv^2}{ds} + \frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} - \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} = \frac{-\lambda \rho v^2}{8 r_h}, \quad r_h = A/perim.$$

$$G = \rho v A$$

(Obviamente: fluidostática $\Longrightarrow v = 0$)

Flujo isentrópico de gases en toberas:

$$\frac{P_o}{P(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad , \quad \frac{\rho_o}{\rho(s)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$G = (\gamma \rho_o P_o)^{1/2} A(s) M(s) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s)^2\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}, \; G^* = (\gamma \rho_o P_o)^{1/2} A_{min} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{A(s)}{A_{min}} = M(s)^{-1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \; ; \quad e.g.: \frac{A(s)}{A_{min}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} M(s) = 2{,}1972 \\ M(s) = 0{,}3059 \end{cases}$$

Evolución de depósitos (sin pérdidas en entrada, mismo gas en entrada y salida):

$$\frac{d(\rho V)}{dt} + G_s - G_e = 0$$

$$\frac{1}{\gamma - 1}\frac{d(PV)}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}\frac{d(\rho V)}{dt} + G_e \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} - h_{oe}\right) + P\frac{dV}{dt} = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + \frac{\gamma G_e}{\rho V}\left(1 - \frac{P_{ext}\rho}{P \rho_{ext}}\right) = \frac{(\gamma - 1)\dot{Q}}{PV}$$

Ondas de choque oblícuas ($M_{n1} = M_1 \sin\beta$):

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{\gamma + 1}\left(\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - \frac{\gamma - 1}{2}\right), \quad M_2 = \left(\frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2(\beta) + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2(\beta) - (\gamma - 1)}\right)^{1/2} / \sin(\beta - \theta)$$

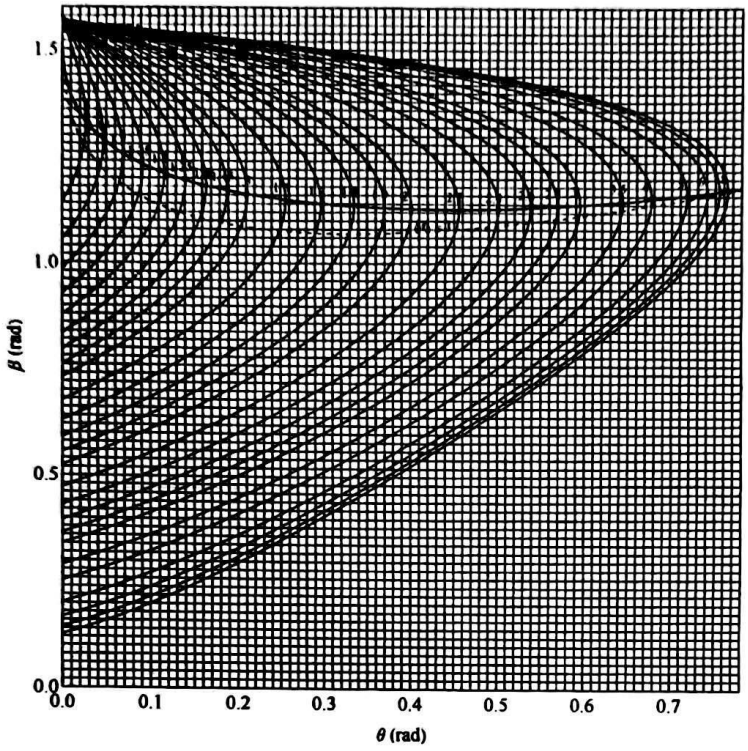
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2(\beta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \theta = \arctan\left\{2\left[\frac{(M_1 \sin\beta)^2 - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right] / \tan\beta\right\}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

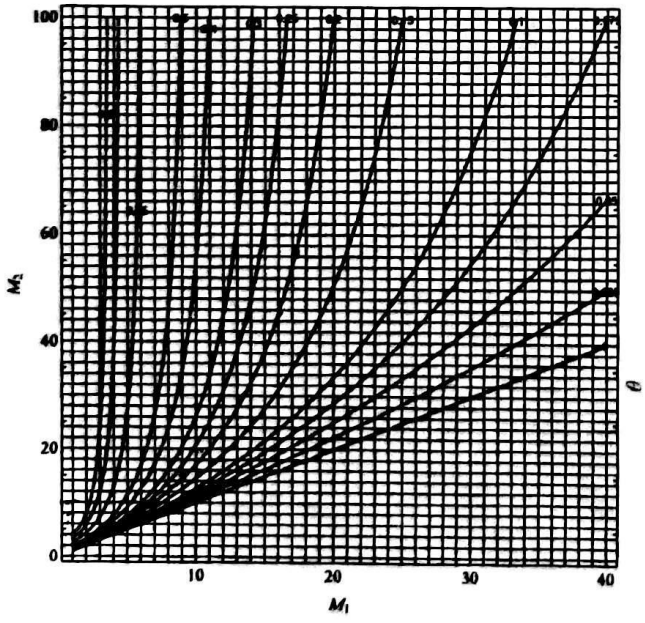
Prontuario (2)

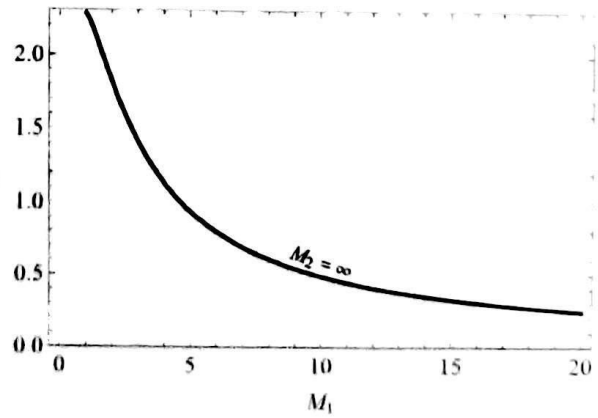
Ondas de choque oblícuas:



Ondas de expansión:

$$\theta = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)(M^2-1)} - \arctan\sqrt{M^2-1}\right]_{M_1}^{M_2} \tag{1}$$

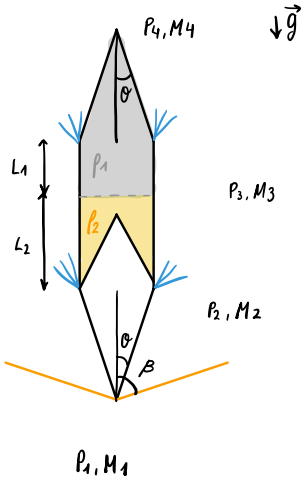




WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

2ºCONVO 2024 Problema 2



$D = 0,6$

peso pistón $\rho_1 = 19 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $L_1 = 1,5$ m

carga hueca $\rho_2 = 2 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $L_2 = 1,5$m

$\theta = 0,2$

$M_1 = 7$

$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$

Apartado 1 β

$$\theta = \text{arctg}\left[2\left(\frac{M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right)\frac{1}{tg\beta}\right]$$

$$\frac{1}{2} tg\theta \, tg\beta = \frac{M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

$$\frac{1}{2} tg\, 0,2 \, tg\beta = \frac{7^2 \operatorname{sen}^2\beta - 1}{7^2(1,4 + \cos 2\beta) + 2}$$

$\beta = 0,31$

Apartado 2 M_2

$$M_2 = \left[\frac{(\gamma-1)M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta + 2}{2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - (\gamma-1)}\right]^{1/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta - \theta)}$$

$$M_2 = \left[\frac{0,4 \cdot 7^2 \operatorname{sen}^2 0,31 + 2}{2 \cdot 1,4 \cdot 7^2 \operatorname{sen}^2 0,31 - 0,4}\right]^{1/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(0,31 - 0,2)} = 5,065$$

Apartado 3

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{\gamma+1}\left(\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - \frac{\gamma-1}{2}\right) = \frac{2}{2,4}(1,4 \cdot 7^2 \operatorname{sen}^2 0,31 - 0,2) = 5,153$$

$P_2 = 5,153\, P_1$

$X = (M_3^2 - 1)^{1/2}$

$(M_2^2 - 1)^{1/2} = 4,965$

Ondas de expansión

$$\theta = [2,449 \text{ arctg}(0,408\, X) - \text{arctg}\, X] - [2,449 \text{arctg}(0,408 \cdot 4,965) - \text{arctg}\, 4,965]$$

$$0,2 = [2,449 \text{ arctg}(0,408\, X) - \text{arctg}\, X] - 1,352$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$X = 6,5632 = (M_3^2 - 1)^{1/2}$

$43,0754 = M_3^2 - 1$

$44,0754 = M_3^2$

$[M_3 = 6,64]$

onda de expansión

$0,2 = [2,449 \arctg(0,408X) - \arctg(X)] - 1,552$

$X = 9,2976 = (M_4^2 - 1)^{1/2}$

$86,4469 = M_4^2 - 1$

$87,4469 = M_4^2$

$[M_4 = 9,351]$

Apartado 4

$\gamma = 1,4$

$R_g = 287 \frac{J}{kgK}$

$T_0 = 288K$

$P_0 = 1,012 \cdot 10^5$ Pas

$h = 6,2$ K/km

$T(z) = T(z=0) - \alpha z$

a) Masa proyectil

$M = \rho V$

masa peso-pistón $= \rho_1 \left(\underbrace{\frac{\pi D^2}{4} L_1}_{V_{cilindro}} + \underbrace{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h}_{V_{cono}}\right) = 19 \cdot 10^3 \left(\frac{\pi 0,6^2}{4} 1,5 + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{0,6}{2}\right)^2 \cdot 1,48\right)$

$= 10708,43$ kg



$tg\theta = \frac{\text{seno}}{\text{coso}} = \frac{D/2}{h}$; $h = \frac{D/2}{tg\,0,2} = \frac{\frac{0,6}{2}}{tg\,0,2} = 1,48$

masa carga hueca $= \rho_2 \left(\frac{\pi D^2}{4} L_2 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h\right) = 2 \cdot 10^3 \left(\frac{\pi 0,6^2}{4} 1,5 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{0,6}{2}\right)^2 1,48\right)$

$= 569,25$ kg

masa proyectil = masa peso-pistón + masa carga hueca

$= 10708,43 + 569,25$

$= 11277,68$ kg

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

b) P_1 suponiendo caída estacionaria

que la caída sea estacionaria significa que el proyectil ha alcanzado su velocidad límite

$a = 0$

Fuerzas en equilibrio $\longrightarrow D = w$

como el proyectil cae por su peso $E = 0$

(+) oposición a la caída

(−) A favor de la caída

$w = M \cdot g = 11277{,}68 \cdot 9{,}8 = 110521{,}33\ N$

$D = \underbrace{-\frac{\pi D^2}{4} P_4}_{\simeq 0} + \frac{\pi D^2}{4} P_2 - \frac{\pi D^2}{4} P_1 = \frac{\pi D^2}{4}(-P_4 + P_2 - P_1) = \frac{\pi D^2}{4} P_1 (-0{,}1 + 5{,}153 - 1) = \frac{\pi D^2}{4} P_1\, 4{,}053$

$P_2 = 5{,}153\, P_1$

Calculamos P_4

→ sacamos P_3

Ondas de expansión $P_{02} = P_3$

$$P_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = P_3 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{1 + 0{,}2 \cdot 5{,}065^2}{1 + 0{,}2 \cdot 6{,}64^2}\right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}} = 0{,}1924$$

$$P_3 = 0{,}1924\, P_2 = 0{,}99\, P_1$$

Ondas de expansión $P_{03} = P_{04}$

$$P_3 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = P_4 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{P_4}{P_3} = \left(\frac{1 + 0{,}2 \cdot 6{,}64^2}{1 + 0{,}2 \cdot 9{,}351^2}\right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}} = 0{,}1$$

$$P_4 = 0{,}1 \cdot 0{,}99\, P_1 = 0{,}1\, P_1$$

$D = w$

$$4{,}053\, P_1 \frac{\pi D^2}{4} = 110521{,}33$$

$$\boxed{P_1 = 96444{,}42\ Pas}$$

c) Altura H respecto del nivel del mar para tener P_1

$T(z) = T(z=0) - \alpha z$

$\alpha = 6{,}2 \frac{K}{km} \cdot \frac{1\,km}{10^3 m} = 6{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{K}{m}$

$$P(z) = P_0 \left[\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right]^{\frac{g}{\alpha R g}} = P_1$$

$$96444{,}42 = 1{,}012 \cdot 10^5 \left[\frac{288 - 6{,}2 \cdot 10^{-3} z}{288}\right]^{\frac{9{,}8}{6{,}3 10^{-3} \cdot 287}}$$

« Queremos la altura z »

Lo metemos en la calculadora $\longrightarrow \boxed{z = 410{,}68\ m}$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.