2oConvo-2023-Problema-2.pdf

quesitoo_

Mecánica de Fluidos I

2º Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Accede al documento original

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

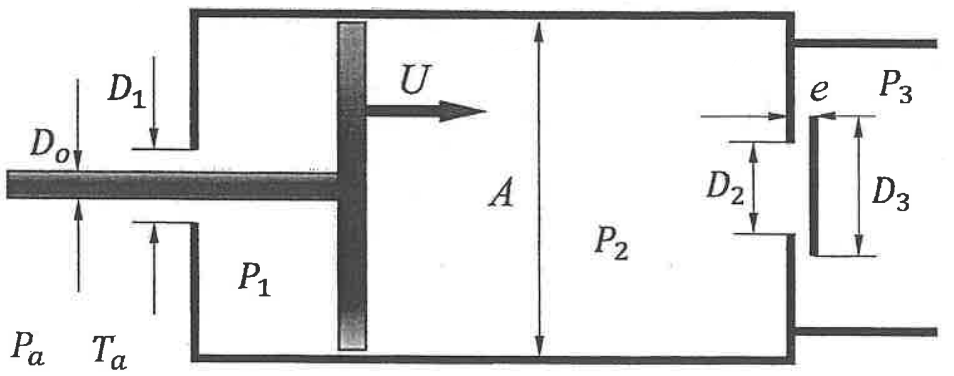
DPTO. INGENIERÍA AEROESPACIAL Y MECÁNICA DE FLUIDOS	EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS *Segunda convocatoria (Julio)*	13/07/2023

Problema 2

Un compresor volumétrico bombea aire desde la presión atmosférica P_a hasta $P_3 > P_a$. Consta de un cilindro aislado de área A en el cual un émbolo que desliza sin rozamiento ni holgura se mueve a velocidad constante U (ver figura). El eje del émbolo y el agujero por el que se introduce al cilindro tienen diámetros D_o y $D_1 > D_o$. El aire escapa del compresor a través de un agujero de diámetro D_2 frente al que hay un disco de diámetro $D_3 > D_2$ separado una distancia $e \ll D_2$ (ver figura). El flujo de gas se puede considerar isentrópico en todas las ranuras (salvo en ondas de choque si las hubiese, naturalmente). Habiendo partido de un estado con aire dentro del cilindro a presión P_a y densidad ρ_a, y despreciando el transitorio, se pide:

1. Si la velocidad U hace que $P_1 < P_a((\gamma+1)/2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$, calcular la presión P_1 y densidad ρ_1 detrás (o a la izquierda) del émbolo como función de U.
2. Densidad del aire ρ_2 delante (o a la derecha) del cilindro como función de P_2.
3. Máxima velocidad U, número de Mach M_2 en el borde del disco (D_3), y presión P_2 para que la presión de descarga sea P_3 y subsónica.
4. Valores de ρ_1, P_1 y potencia que hay que comunicar al émbolo en el caso anterior.
5. Presión P_2, velocidad U, y temperatura T_2 para se forme una onda de choque al borde del disco (D_3).
6. Valores de ρ_1, P_1 y potencia que hay que comunicar al émbolo en el caso anterior.

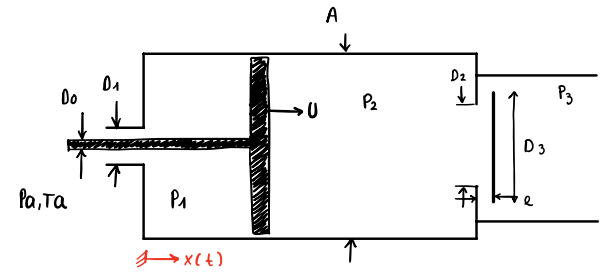
Datos: $D_o = 10$ mm, $D_1 = 15$mm, $D_2 = 12$mm, $D_3 = 17$mm, $e = 3$mm, $A = 0{,}01$ m^2, $T_a = 300$ K, $P_a = 10^5$ Pas, $C_p = 10^3$ J/(Kg K), $\gamma = 1{,}4$, $P_3 = 2 \times 10^5$ Pas.



WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

2°CONVO 2023 Problema 2



- $e \ll D_2$
- Flujo gas isentrópico en todas las ranuras (salvo en OC)
- condiciones iniciales P_a, ρ_a

<< régimen estacionario >>
↑ suponemos

- cilindro aislado

$D_0 = 10\,mm$ $e = 3mm$ $c_p = 10^3 \frac{J}{kg\,K}$

$D_1 = 15\,mm$ $A = 0{,}01\,m^2$ $\gamma = 1{,}4$

$D_2 = 12mm$ $T_a = 300\,K$ $P_3 = 2 \cdot 10^5\,Pa\,sc$

$D_3 = 17mm$ $P_a = 10^5\,Pa\,sc$

Apartado 1

$P_1 < P_a \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad P_1 < P_a$

$\frac{P_1}{P_a} < \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad \frac{P_1}{P_a}$

Π_{S1} ↓ Tobera bloqueada

Ec. energía: $\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}P_1V_1 = G_e h_e - G_s h_s - P_1\frac{dV_1}{dt} + \dot{Q}$ (todos tachados salvo $P_1\frac{dV_1}{dt}$)

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}P_1 A U = G_1 c_p T_a$$

Ec. masa: $\frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) + G_s - G_e = 0$

$$\rho_1 A U = G_1$$

Necesitamos el gasto:

$$G_1 = G_1^* = (\gamma \rho_a P_a)^{1/2} \frac{\pi(D_1^2 - D_0^2)}{4} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} =$$

$$A_m = \frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{\pi D_0^2}{4} = \frac{\pi(D_1^2 - D_0^2)}{4}$$

Para sacar P_1: $\frac{\gamma}{\gamma-1}P_1 A U = G_1^* c_p T_a$ [Todo conocido menos P_1, U]

Para sacar ρ_1: $\rho_1 A U = G_1^*$ [Todo conocido menos ρ_1, U]

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Apartado 2 $\rho_2 = \rho_2(P_2)$

Ec. masa: $\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2) + G_s - \cancel{G_e} = 0$

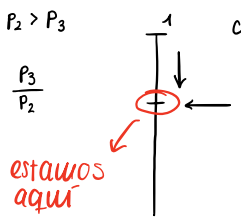
Ec. energía: $\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(P_2 V_2) = \cancel{G_e h_e} - G_s h_s - P_2\frac{dV_2}{dt} + \cancel{\dot{Q}}$

Al ser una descarga en un recinto aislado podemos considerar el proceso como isentrópico

$$\frac{P_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{P_a}{\rho_a^\gamma} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \rho_a\left(\frac{P_2}{P_a}\right)^{1/\gamma}}$$

Apartado 3 u_{max}, M_2, P_2

Modelamos el final como una tobera convergente - divergente



cuando el cociente de presiones disminuye $u\uparrow$, $G\uparrow$

dejaríamos de tener isentropía ya que tendríamos ondas de choque

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

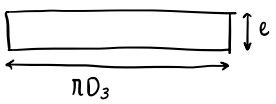
Al ser una descarga $\longrightarrow$ ec. masa: $\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2) + G_s - \cancel{G_e} = 0$

$$\rho_2 A u = G_2$$

$$\left[u = \frac{G_2}{\rho_2 A}\right] \rightarrow$$ necesitamos G, ρ_2 (ρ_2 lo tenemos pero está en función de P_2, que es desconocida)

Calculamos el gasto

$$G_2 = G_2^* = (\gamma\rho_2 P_2)^{1/2} \underbrace{\frac{\pi D_2^2}{4}}_{A_m}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



$A_s = \pi D_3 e$

Necesitamos P_2: $\frac{A_s}{A_m} = \frac{\pi D_3 e}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = \frac{1}{M_s}\left(\frac{1,2}{1+0,2M_s^2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

$$\frac{0,017 \cdot 0,003 \cdot 4}{0,012^2} = \frac{1}{M_s}\left(\frac{1,2}{1+0,2M_s^2}\right)^{-3}$$

$\rightarrow M_{s1} = 0,4663 = M_2$

$\rightarrow M_{s2} = 1,779$

$$\frac{P_0}{P_s} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{P_2}{P_3} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{s1}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_2 = 2\cdot 10^5\left(1+\frac{1,4-1}{2}0,4663^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = \boxed{2,32\cdot 10^5 \text{ Pasc}}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Con estos datos sacamos G_2^* para calcular U:

$$\rho_2 = \rho_a \left(\frac{P_2}{P_a}\right)^{1/\gamma} = \frac{P_a}{R_g T_a}\left(\frac{P_2}{P_a}\right)^{1/\gamma} = \frac{P_a}{\frac{\gamma-1}{\gamma} C_p T_a}\left(\frac{P_2}{P_a}\right)^{1/\gamma} = \frac{10^5}{\frac{1,4-1}{1,4}\, 10^3 \cdot 300}\left(\frac{2,32\cdot 10^5}{10^5}\right)^{1/1,4}$$

$$\rho_2 = 2,128 \ kg/m^3$$

$$G_2 = G_2^* = (1,4 \cdot 2,128 \cdot 2,32 \cdot 10^5)^{1/2} \frac{\pi \cdot (0,012)^2}{4}\left(\frac{1,4+1}{2}\right)^{-3} = 0,0544 \ kg/s$$

$$U_{max} = \frac{0,0544}{2,128 \cdot 0,01} = 2,556 \ m/s$$

Apartado 4 ρ_1, P_1, W para caso anterior

En el apartado 1 teníamos la relación entre ρ_1, P_1, U; pues sustituimos

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} P_1 A U = G_1^* C_p T_a$$

$$\rho_1 A U = G_1^*$$

sustituimos los datos y $U = 2,556 \ m/s$

Importante poner G_1^* calculado en el apartado 1

¡¡ No pone G_2^*, ya que ese es el de la salida de la dcha !!

Para calcular la potencia $W = F \cdot U$

Aplicamos equilibrio en el émbolo: $P_1 A + F = P_2 A$

$F = (P_2 - P_1) A$

↓ lo acabamos de calcular

calculado en el apartado 3

$W = (P_2 - P_1) A U$ → Todo conocido ya

↓

$2,556 \ m/s$

Apartado 5 P_2, U, T_2 para onda choque en borde D_3

Para que se forme una onda de choque normal en la salida $M_S > 1$

$$\frac{A_S}{A_m} = \frac{1}{M_S}\left(\frac{1,2}{1+0,2M_S^2}\right)^{-3}$$

- $M_{S1} = 0,4663$
- $M_{S2} = 1,1779$

No podemos usar $\frac{P_0}{P_S} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ como hay onda de choque, ya no es isentrópico

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$\frac{P_3}{P_2} = \pi_{ns}$

Calculamos $\pi_{ns} = \pi_{s2}$ $\frac{P_2}{P_1}$ → justo después } de la O.C
→ justo antes

$\pi_{s2} = \left(1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_{s2}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 1,779^2\right)^{\frac{-1,4}{1,4-1}} = 0,179$

$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left[M_1^2 - 1\right] = 1 + \frac{2 \cdot 1,4}{1+1,4}\left(1,779^2 - 1\right) = 3,5256$

$\frac{P_3}{P_2} = 0,179 \cdot 3,5256 = 0,631$

$P_2 = 1,58 \cdot P_3 = 3,17 \cdot 10^5$ Pas

$\rho_2 = \rho_a \left(\frac{P_2}{P_a}\right)^{1/\gamma} = \frac{10^5}{\frac{1,4-1}{1,4} \cdot 10^3 \cdot 300} \left(\frac{3,17 \cdot 10^5}{10^5}\right)^{1/1,4} = 2,66 \ kg/m^3$

$\boxed{u = \frac{G_2^*}{\rho_2 A}}$ → el mismo del apartado 3

↳ sustituimos y sacamos u

sacamos T_2 : proceso en el depósito es isentrópico

$P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = cte$

$P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2 = P_a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_a$

$T_2 = T_a \left(\frac{P_a}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 300 \left(\frac{10^5}{3,17 \cdot 10^5}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 417,14$ K

Apartado 6

$\frac{\gamma}{\gamma-1} P_1 A U = G_1^* c_p T_a$

$\rho_1 A U = G_j^*$

} sustituimos el nuevo U del apartado 5
El resto de datos los conocemos también

$W = (P_2 - P_1) A U$ → Todo conocido

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.